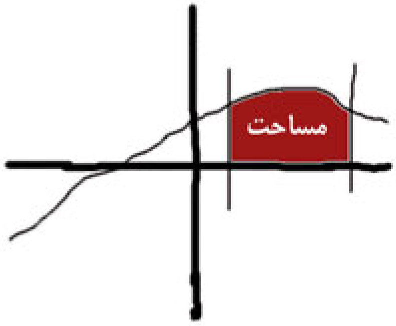
انتگرال

در حساب دیفرانسیل و انتگرال ، از انتگرال یک تابع برای عمومیت دادن به محاسبه مساحت ، حجم ، جرم یک تابع استفاده می شود. فرایند پیدا کردن جواب انتگرال را انتگرال گیری گویند. البته تعاریف متعددی برای انتگرال گیری وجود دارد ولی در هر حال جواب مشابه ای از این تعاریف بدست می آید. انتگرال یک تابع مثبت پیوسته در بازه (a,b) در واقع پیدا کردن مساحت بین خطوط x=0 , x=10 و خم منفی F است . پس انتگرال F بین a و b در واقع مساحت زیر نمودار است. اولین بار لایب نیتس نماد استانداری برای انتگرال معرفی کرد و به عنوان مثال انتگرال f بین a و b رابه صورت $\int_a^b f(x)\,dx$ نشان می دهند

علامت $\int$، انتگرال گیری از تابع f را نشان می دهند، aو b نقاط ابتدا و انتهای بازه هستند و f تابعی انتگرال پذیر است و dx نمادی برای متغیر انتگرال گیری است.

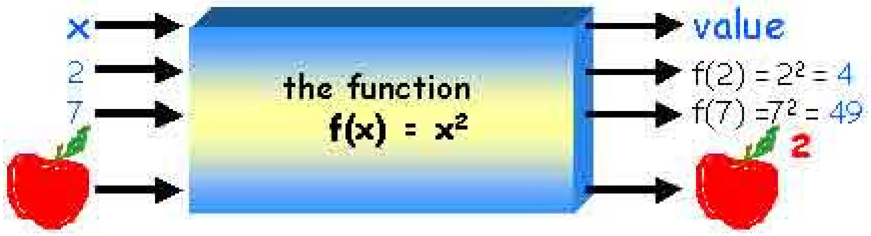


از لحاظ تاریخی dx یک کمیت بی نهایت کوچک را نشان می دهد. هر چند در تئوریهای جدید، انتگرال گیری بر پایه متفاوتی
پایه گذاری شده است به عنوان مثال تابع f را بین x=0 تا x=10 در نظر بگیرید ،مساحت زیر نمودار در واقع مساحت مستطیل خواهدبود که بین x=0، x=10، y=0، y=3 محصور شده است یعنی دارای طول 10 و عرض 3است پس مساحت آن برابر 30 خواهد بود .

اگر تابعی دارای انتگرال باشد به آن انتگرال پذیر گویند و تابعی که از انتگرال گیری از یک تابع حاصل می شود تابع اولیه گویند . اگر انتگرال گیری از تابع در یک محدوده خاص باشند به آن انتگرال معین گویند که نتیجه آن یک عدد است ولی اگر محدوده آن مشخص نباشد به آن انتگرال نامعین گویند.

تعریف تابع

در ریاضیات تابع عملکردی است که برای هر ورودی داده شده یک خروجی منحصر بفرد تولید می‌کند معکوس این مطلب را در تعریف تابع بکار نمی‌برند. یعنی در واقع یک تابع می‌تواند برای چند ورودی متمایز خروجیهای یکسان را نیز تولید کند. برای مثال با فرض y=x2 با ورودیهای 5- و 5 خروجی یکسان 25 را خواهیم داشت. در بیان ریاضی تابع رابطه ای است که در آن عنصر اول به عنوان ورودی و عنصر دوم به عنوان خروجی تابع جفت شده است.
به عنوان مثال تابع f(x)=x2 بیان می‌کند که ارزش تابع برابر است با مربع هر عددی مانند x



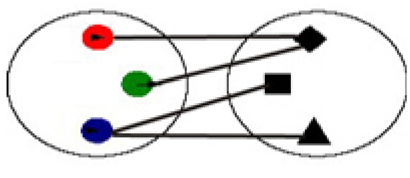
در واقع در ریاضیات رابطه را مجموعه جفتهای مراتب معرفی می‌کنند. با این شرط که هرگاه دو زوج با مولفه های اول یکسان در این رابطه موجود باشند آنگاه مولفه های دوم آنها نیز یکسان باشد. همچنین در این تعریف خروجی تابع را به عنوان مقدار تابع در آن نقطه می‌نامند. مفهوم تابع اساسی اکثر شاخه های ریاضی و علوم محاسباتی می‌باشد. همچنین در حالت کلی لزومی ندارد که ما بتوانیم فرم صریح یک تابع را به صورت جبری آلوگرافیکی و یا هر صورت دیگر نشان دهیم.
فقط کافیست این مطلب را بدانیم که برای هر ورودی تنها یک خروجی ایجاد می‌شود در چنین حالتی تابع را می‌توان به عنوان یک جعبه سیاه در نظر گرفت که برای هر ورودی یک خروجی تولید می‌کند. همچنین لزومی ندارد که ورودی یک تابع ، عدد و یا مجموعه باشد. یعنی ورودی تابع را می‌توان هر چیزی دلخواه در نظر گرفت البته با توجه به تعریف تابع و این مطلبی است که ریاضیدانان در همه جا از آن بهره می‌برند.

تاریخچه تابع
نظریه مدرن توابع ریاضی بوسیله ریاضیدان بزرگ لایب نیتر مطرح شد همچنین نمایش تابع بوسیله نمادهای y=f(x) توسط لئونارد اویلر در قرن 18 اختراع گردید، ولی نظریه ابتدایی توابع به عنوان عملکرهایی که برای هر ورودی یک خروجی تولید کند توسط جوزف فوریه بیان شد.

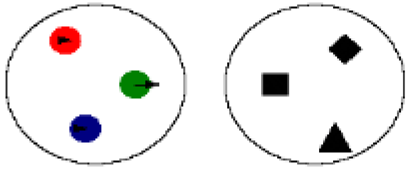
برای مثال در آن زمان فوریه ثابت کرد که هر تابع ریاضی سری فوریه دارد.
چیزی که ریاضیدانان ما قبل اوبه چنین موردی دست نیافته بودند، البته موضوع مهمی که قابل ذکر است آنست که نظریه توابع تا قبل از بوجود آمدن نظریه مجموعه ها در قرن 19 پایه و اساس محکمی نداشت. بیان یک تابع اغلب برای مبتدی‌ها با کمی ابهام همراه است، مثلا برای توابع کلمه x را به عنوان ورودی و y را به عنوان خروجی در نظر می‌گیرند ولی در بعضی جاها y,x را عوض می‌کنند.

ورودی تابع
ورودی یک تابع را اغلب بوسیله x نمایش می‌دهند. ولی زمانی که ورودی تابع اعداد صحیح باشد. آنرا با x اگر زمان باشد آنرا با t ، و اگر عدد مختلط باشد آنرا با z نمایش می‌دهند. البته اینها مباحثی هستند که ریاضیدانان برای فهم اینکه تابع بر چه نوع اشیایی اثر می‌کند بکار می‌رود. واژه قدیمی آرگومان قبلا به جای ورودی بکار می‌رفت. همچنین خروجی یک تابع را اغلب با y نمایش می‌دهند در بیشتر موارد به جای f(x), y گفته می‌شود. به جای خروجی تابع نیز کلمه مقدار تابع بکار می‌رود. خروجی تابع اغلب با y نمایش داده می‌شود. ولی به عنوان مثال زمانی که ورودی تابع اعداد مختلط باشد، خروجی آنرا با "W" نمایش می‌دهیم.
$W = f(z)$

تعریف روی مجموعه ها
یک تابع رابطه‌ای منحصر به فرد است که یک عضو از مجموعه‌ای را با اعضای مجموعه‌ای دیگر مرتبط می‌کند. تمام روابط موجود بین دو مجموعه نمی‌توانند یک تابع باشد برای روشن شدن موضوع ، مثالهایی در زیر ذکر می‌کنیم:
این رابطه یک تابع نیست چون در آن عنصر 3، با دو عنصر ارتباط دارد. که این با تعریف تابع متناقض است چون برای یک عنصر از مجموعه، دو عنصر در مجموعه موجود است



این رابطه یک تابع یک به یک است. چون به ازای هر x یک y وجود دارد.



تعریف ساخت یافته تابع
بطور ساخت یافته یک تابع از مجموعه x به مجموعه y بصورت f:x→y نوشته می‌شود و به صورت سه تایی مرتب (x,y,G(f)) نمایش داده می‌شود. بطوری که G(f) زیر مجموعه ای از حاصلضرب کارتزین xy می‌باشد. با این شرط که به ازای هر x در X یک Y متعلق به Y نسبت داد شود. با این شرط زوج مرتب (x,y) را در داخل G(f) می‌پذیریم. در این حالت نیز X را به عنوان دامنه f و y را به عنوان برد fو G(f) را به عنوان نمودار و یا گراف تابع F در نظر می‌گیرند.

خواص توابع
توابع می‌توانند:

- زوج یا فرد باشند.
- پیوسته یا ناپیوسته باشند.
- حقیقی یا مختلط باشند.
- اسکالر یا برداری باشند.

توابع چند متغیره
یک تابع ممکن است بیشتر از یک متغیر داشته باشد برای مثال $f(x,y,z)$یک تابع از f است که دارای سه پارامتر x,y,z است که یک ارزش را برای تابع تولید می‌کنند. از توابع چند متغیره می‌توان به قانون جاذبه نیوتن اشاره کرد که در آن دو جرم با متغیر m_1و m_2و نیز یک متغیر برای فاصله هر جرم به نام rدر آن وجود دارد.

$$F = G\frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

با مقدار دهی به سه پارامتر فوق مقدار تابع F محاسبه خواهد شد.

مثال در مورد توابع زوج و فرد:

فرض کنید f تابعی با دامنه D_f باشد و برای هر $x \in D_f$ آنگاه $-x \in D_f$ باشد (در اصطلاح دامنه تابع f متقارن باشد). در این صورت:

- تابع f را زوج می گوییم هرگاه: $\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$
- تابع f را فرد می گوییم هرگاه: $\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$

اگر هیچ یک از شرایط فوق برقرار نباشد تابع را نه زوج و نه فرد می گوییم.

- توجه کنید که شرط اولیه اینکه تابعی بتواند زوج یا فرد باشد این است که دامنه اش متقارن باشد یعنی:

$$\forall x \in D_f : x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$$

و اگر شرط فوق برقرار نباشد در مورد زوج یا فرد بودن تابع بحث نمی شود. (چرا؟)

به عنوان مثال تابع $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ تابعی است نه زوج و نه فرد چرا که دامنه اش برابر است با $D_f = R - \{1\}$ که متقارن نمی باشد چون 1- عضو دامنه بوده ولی 1 عضو دامنه نمی باشد و شرط اولیه برای زوج یا فرد بودن تابع برقرار نمی باشد.

به عنوان مثال تابع $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ تابعی زوج است چرا که اولا وامنه اش مجموعه اعداد حقیقی بوده پس متقارن است و همچنین داریم:

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$$

و همچنین تابع $f(x) = x^3 - x$ تابعی فرد است چرا که دامنه اش مجموعه اعداد حقیقی بوده و متقارن است و همچنین:

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$$

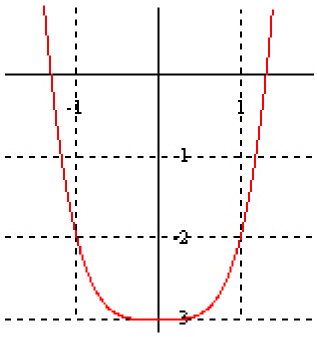
تابع $f(x) = x^2 + x$ هم تابعی نه زوج و نه فرد است زیرا: (البته شرط اولیه یعنی متقارن بودن دامنه برقرار است) $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$ که در هیچ یک از شراط تابع زوج یا فرد صدق نمی کند.

بررسی زوج و فرد بودن تابع از روی نمودار تابع:

- از نظر هندسی نمودار تابع زوج نسبت به محور y ها متقارن است.

برهان: می دانیم در تقارن یک نقطه نسبت به محور y ها مولفه y ثابت و مولفه x قرینه می شود پس $y = f(x)$ زمانی نسبت به محور y ها متقارن است که با تبدیل x به x- تابع تغییری نکند. پس در چنین تابعی داریم: $f(-x) = f(x)$ که این همان تعریف تابع زوج است.

به عنوان مثال نمودار تابعی که در بالا زوج بودنش را نشان دادیم به این صورت است:

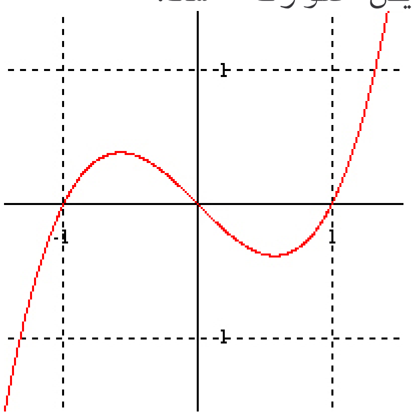


مشاهده می کنید این تابع نسبت به محور Y ها متقارن است.

- از نظر هندسی نمودار تابع فرد نسبت به مبدا مختصات متقارن است.

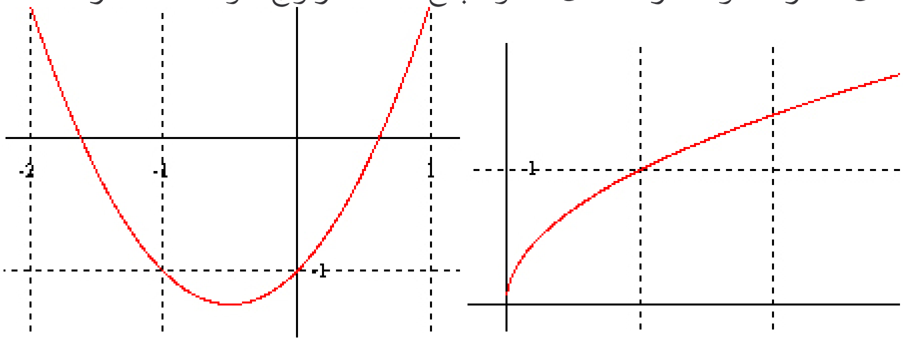
برهان: می دانیم در تقارن یک نقطه نسبت به مبدا همه مولفه ها قرینه می شوند. پس تابع $y = f(x)$ هنگامی نسبت به مبدا متقارن است که با تبدیل x به x- تابع از (f(x به (f(x- تغییر کند. پس در چنین تابعی داریم: $f(-x) = -f(x)$ که این همان تعریف تابع فرد است.

به عنوان مثال نمودار تابعی که در بالا فرد بودنش را بررسی کردیم به این صورت است:



مشاهده می شود این تابع نسبت به مبدا متقارن است.

تابعی که هیچ یک از این ویژگی ها را نداشته باشد نه زوج و نه فرد است. به عنوان مثال نمودار های زیر نمونه ای از نمودار های توابع نه زوج و نه فرد است:



از معروف ترین توابع نه زوج و نه فرد می توان به تابع هموگرافیک و تابع لگاریتم اشاره کرد.

- حال ممکن است این سوال پیش بیاید که آیا تابعی وجود دارد که هم زوج و هم فرد باشد؟

بررسی می کنیم:

اگر چنین تابعی موجود باشد خاصیت زوج بودن و فرد بودن را با هم دارد. فرض کنید تابع $f(x)$ با دامنه D_f دارای چنین خاصیتی باشد و $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

داریم:

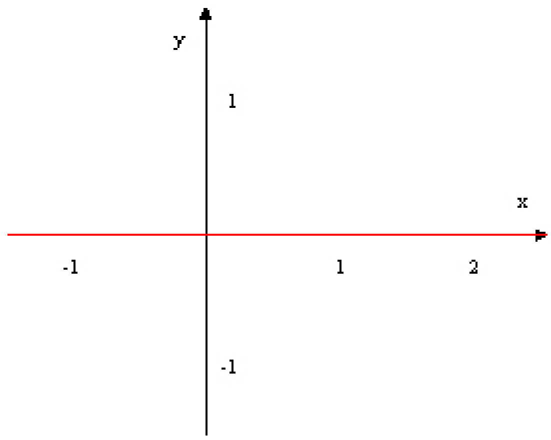
$$\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$$

$$\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$$

حال با جمع کردن طرفین:

$$\Rightarrow f(-x) - f(-x) = f(x) + f(x) \Rightarrow 2f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

پس تابع $f(x) = 0$ (محور X ها) تنها تابعی است که هم زوج و هم فرد است و نمودار آن به این صورت است:



مشاهده می کنید که نمودار این تابع هم نسبت به مبدا مختصات و هم نسبت به محور Y ها متقارن است پس هم زوج و هم فرد است.

- **چند خاصیت از توابع زوج و فرد :**
- اگر f و g دو تابع زوج باشند آنگاه ترکیبشان یعنی fog (یا gof) هم زوج است.

برهان :باید نشان دهیم :

$$(fog)(-x) = (fog)(x)$$

چون f و g دو تابع زوج هستند طبق فرض داریم :

$$f(-x) = f(x), g(-x) = g(x)$$

پس :

$$(fog)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (fog)(x)$$

لذا تابع fog زوج است به همین روش می توان نشان داد gof هم زوج است.

- اگر f و g دو تابع فرد باشند آنگاه ترکیبشان یعنی (fog یا gof) هم تابعی فرد است.

برهان :باید نشان دهیم :

$$(fog)(-x) = -(fog)(x)$$

چون f و g دو تابع فرد هستند داریم :

$$f(-x) = -f(x), g(-x) = -g(x)$$

پس :

$$(fog)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -(fog)(x)$$

لذا تابع fog تابعی فرد است. به همین روش می توان اثبات نمود gof هم تابعی فرد است.

- ترکیب دو تابع که یکی زوج و دیگری فرد باشد همواره تابعی زوج است.

برهان: فرض می کنیم f تابعی زوج دلخواه و g تابعی فرد دلخواه باشد. نشان می دهیم تابع حاصل از ترکیب این دو تابع تابعی فرد است.
طبق فرض داریم :
$$f(-x) = f(x), g(-x) = -g(x)$$

ابتدا نشان می دهیم تابع fog تابعی فرد است.
$$(fog)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = (fog)(x)$$

پس fog تابعی زوج است. حال نشان می دهیم که gof هم زوج است.
$$(gof)(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = (gof)(x)$$

پس gof تابعی زوج است. لذا حکم برقرار است.

- اگر f و g تابعی زوج باشند آنگاه توابع حاصل از اعمال جبری این دو تابع یعنی:

$$(f+g)(x), (f-g)(x), (f.g)(x), (\frac{f}{g})(x)$$

هم توابعی زوج هستند. (در هر حالت می توان جای f و g را با هم عوض نمود)
(البته در مورد تقسیم دو تابع باید در نظر داشت که حکم فوق همواره کلی نمی باشد و به دامنه مخرج بستگی دارد، چرا که ممکن است شرط متقارن بودن تابع حاصل از تقسیم برقرار نباشد.)

برهان: برای نمونه یک حالت زوج بودن $(f+g)(x)$ را اثبات می کنیم. سایر حالات به طریقی مشابه اثبات می شوند.
چون f و g دو تابع زوج هستند داریم :
$$f(-x) = f(x), g(-x) = g(x)$$

پس :
$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

لذا تابع f+g تابعی زوج است.

- اگر f و g دو تابع فرد باشند آنگاه تابع $(f \pm g)(x)$ تابعی فرد و سایر حالات یعنی: $(f.g)(x), (\frac{f}{g})(x)$ توابعی زوج هستند.

(در هر حالت می توان جای f و g را عوض کرد)
(البته درمورد تقسیم دو تابع باید در نظر داشت که حکم فوق همواره کلی نمی باشد و به دامنه مخرج بستگی دارد، چرا که ممکن است شرط متقارن بودن تابع حاصل از تقسیم برقرار نباشد).

برهان: ابتدا نشان می دهیم $(f \pm g)(x)$ تابعی فرد است.چون دو تابع f و g توابعی فرد هستند داریم:

$$f(-x) = -f(x), g(-x) = -g(x)$$

پس:

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) + (-g(x)) = -(f(x) + g(x)) = -(f+g)(x)$$

$$(f-g)(-x) = f(-x) - g(-x) = -f(x) + g(x) = -(f(x) - g(x)) = -(f-g)(x)$$

لذا دوتابع مذکور فرد می باشند.

حال نشان می دهیم دو تابع $(f.g)(x), (\frac{f}{g})(x)$ زوج می باشند.

$$(f.g)(-x) = f(-x).g(-x) = (-f(x)).(-g(x)) = f(x).g(x) = (f.g)(x)$$

$$(\frac{f}{g})(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f}{g}(x)$$

(اثبات فوق در باره تقسیم دو تابع با فرض مساعد بودن دامنه f/g برای زوج و فرد بودن نوشته شده است)
پس دو تابع مذکور زوج می‌باشند.

- اگر f تابعی زوج و g تابعی فرد باشد آنگاه $(f \pm g)(x)$ تابعی نه زوج ونه فرد بوده و توابع $(f.g)(x), \frac{f}{g}(x)$ توابعی فرد می‌باشند.

برهان: ابتدا به بررسی تابع $(f \pm g)(x)$ پردازیم . چون f زوج و gفرد است داریم :

$$f(-x) = f(x), g(-x) = -g(x)$$

پس :

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x)$$

$$(f-g)(-x) = f(-x) - g(-x) = f(x) + g(x)$$

پس دوتابع فوق در شرایط تابع زوج یا فرد صدق نمی کنند لذا نه زوج و نه فرد هستند.

حال نشان می دهیم در تابع $(f.g)(x), \frac{f}{g}(x)$ فرد هستند :

$$(f.g)(-x) = f(-x).g(-x) = f(x).(-g(x)) = -(f(x).g(x)) = -(f.g)(x)$$

$$(\frac{f}{g})(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{f(x)}{-g(x)} = -\frac{f(x)}{g(x)} = -(\frac{f}{g})(x)$$

(اثبات فوق در باره تقسیم دو تابع با فرض مساعد بودن دامنه f/g برای زوج و فرد بودن نوشته شده است)
پس دو تابع فوق فرد می باشند.

محاسبه انتگرال

اکثر روش های اساسی حل انتگرال بر پایه قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال بنا نهاده شده است که بر طبق آن داریم :

1.f تابعی در بازه (a,b) در نظر می گیریم .
2.پاد مشتق f را پیدا می کنیم که تابعی است مانند f که و داریم : $F' = f$
3.قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را در نظر می گیریم :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

بنابراین مقدار انتگرال ما برابر $F(b) - F(a)$ خواهد بود .

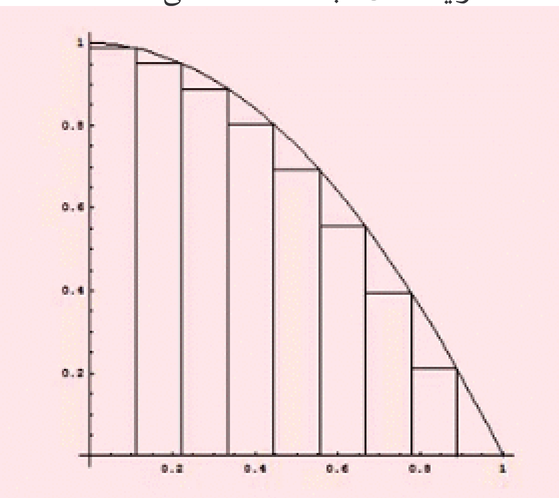
به این نکته توجه کنید که انتگرال واقعاً پاد مشتق نیست (یک عدد است) اما قضیه اساسی به ما اجازه می دهد تا از پاد مشتق برای محاسبه مقدار انتگرال استفاده کنیم.

معمولاً پیدا کردن پاد مشتق تابع f کار ساده ای نیست و نیاز به استفاده از تکنیکهای انتگرالگیری دارد این تکنیکها عبارتند از:

- انتگرال گیری بوسیله تغییر متغیر
- انتگرال گیری جزء به جزء
- انتگرال گیری با تغییر متغیر مثلثاتی
- انتگرال گیری بوسیله تجزیه کسرها

تقریب انتگرالهای معین

انتگرال هایی معین ممکن است با استفاده از روش های انتگرال گیری عددی ،تخمین زده شوند.یکی از عمومی ترین روش ها ،روش مستطیلی نامیده می شود در این روش ناحیه زیر نمودار تابع به یک سری مستطیل تبدیل شده و جمع مساحت آنها نشان دهنده مقدار تقریبی انتگرال است. از دیگر روش هایی معروف برای تخمین مقدار انتگرال روش سیمپسون و روش ذوزنقه ای است. اگر چه روش های عددی مقدار دقیق انتگرال را به ما نمی دهند ولی در بعضی از مواقع که انتگرال تابعی قابل حل نیست یا حل آن مشکل است کمک زیادی به ما می کند .



تعریف های انتگرال

از مهم ترین تعاریف در انتگرال می توان از انتگرال ریمان و انتگرال لبسکی (lebesgue) است. انتگرال ریمان بوسیله برنهارد ریمان در سال 1854 ارئه شد که تعریف دقیقی را از انتگرال ارائه می داد تعریف دیگر را هنری لبسکی ارائه داد که طبق این تعریف شرایط تعویض پذیری حد و انتگرال با شرط مساوی ماندن عبارت، ارائه

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{if } n \neq -1$$

$$\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcsec} x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{2x - \sin 2x}{4} + C$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{2x + \sin 2x}{4} + C$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

$$\int \tanh x\,dx = \ln(\cosh x) + C$$

$$\int \operatorname{csch} x\,dx = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \operatorname{sech} x\,dx = \arctan(\sinh x) + C$$

$$\int \coth x\,dx = \ln|\sinh x| + C$$

را در هر نقطه دلخواه بدست آوریم.همچنین با استفاده از مشتق میتوان خواص هندسی منحنی یک تابع مانند تقعر و تحدب را مشخص کرد.
البته باید به این نکته توجه کرد که هر تابعی در هر نقطه نمیتواند مشتق داشته باشد و به طور کلی مشتق پذیری یک تابع در یک نقطه شرایط خاصی میطلبد.

مشتق گیری و مشتق پذیری

در گذشته های نه چندان دور، مشتق یک تابع را به صورت زیر نشان می دادند:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

که در این فرمولΔنشان دهنده میزان تغییرات یک کمیت است. ولی در حال حاضر برای محاسبه مشتق توابع،بیشتر از فرمول زیر استفاده میکنند:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

معمولا از نمادهای زیر برای نشان دادن مشتق تابع f نسبت به متغیرx ، استفاده میکنند:

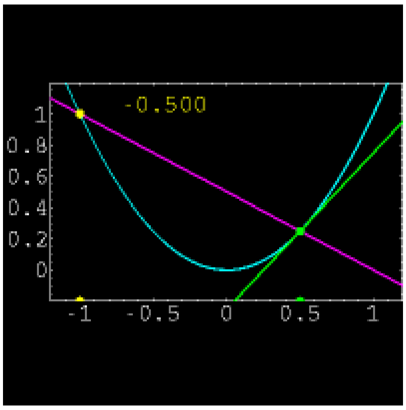
$$\boxed{f'(x)}$$

$$\boxed{\frac{df}{dx}}$$

$$\boxed{D_x f}$$

یک تابع را در نقطه ای مانند x مشتق پذیر گویند اگردر آن نقطه مشتق موجود باشد. و برای مشتق پذیری تابع در یک بازه لازم است تابع در هر نقطه دلخواه از بازه مشتق پذیر باشد.اگر تابع در نقطه ای مانند c پیوسته نباشد آنگاه در c نمیتواند مشتق پذیر باشد.البته لازم به ذکر است که پیوستگی در یک نقطه وجود مشتق را تضمین نمیکند.مشتق یک تابع مشتق پذیر میتواند خود نیز مشتق پذیر باشد،که به مشتق آن مشتق دوم تابع گویند.مشتق مراتب بالاتر نیز به همین ترتیب تعریف میشوند.

بررسی مشتق از نظر هندسی



از نظر هندسی مشتق یک تابع در یک نقطه دلخواه ،شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است. البته پیدا کردن مستقیم شیب خط مماس در یک نقطه کار دشواری است.زیرا فقط مختصات یک نقطه از خط مماس را داریم.(برای پیدا کردن شیب یک خط از مختصات دو نقطه بر روی خط استفاده میکنیم)برای حل این مشکل از یک خط متقاطع استفاده کرده و این خط را به خط مماس نزدیک میکنیم.برای درک بهتر موضوع به شکل مقابل توجه نمایید.در این شکل خط متقاطع با رنگ بنفش و خط مماس با رنگ سبز مشخص شده است و عددی که در تصویر تغییر میکند نشان دهنده شیب خط متقاطع میباشد. حال از دیدگاه ریاضی این روش را بیان میکنیم:

از دیدگاه ریاضی بدست آوردن مشتق با حدگیری از شیب خط قاطع که به خط مماس نزدیک شده است بدست می آید.پیدا کردن شیب نزدیکترین خط متقاطع به خط مماس با استفاده از کوچکترین h در فرمول زیر حاصل میشود:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

در این فرمول h به عنوان کوچکترین تغییر متغیر x تعریف میشودو میتواند مقدار مثبت یا منفی اختیار کند. در این فرمول شیب خط با استفاده از نقاط $(x, f(x))$ و $(x+h, f(x+h))$ حاصل میشود.واضح است که در این روش فقط یک نقطه روی خط برای ما معلوم است و نیازی برای بدست آوردن نقطه دوم روی خط وجود ندارد.همچنین در این روش مشتق x ،حاصل حد زیر است:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

انتگرالهای معین

توابعی وجود دارند که عمل معکوس مشتق گیری را برای آن توابع *نمی توان* در شکل بسته نمایش داد. بهرحال،

مقادیر انتگرالهای محدود این گونه توابع را میتوان در فاصله های متعارف محاسبه نمود. ذیلا، تعداد کمی از انتگرالهای محدود ارائه شده اند.

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$:

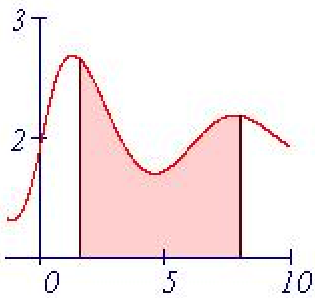
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$:

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}\, dx = \frac{\pi^2}{6}$$:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx = \frac{\pi^4}{15}$$:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} TEX() \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\ :$$:

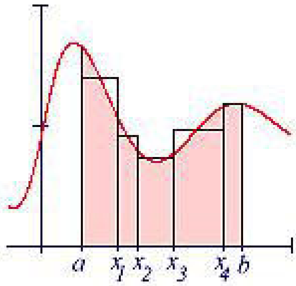
انتگرال ریمان



همان طور که می توانیم پیدا کردن مساحت زیر یک نمودار منحنی، کار ساده ای نیست .چونسطح زیر منحنی یک شکل منظم نیست پس هیچ فرمول تعریف شده ای برای پیدا کردن مساحت آن وجود ندارد. بنابراین ما به دنبال راهی برای حل این مشکل هستیم.

حال به دنبال راهی برای تخمین مساحت زیر منحنی هستیم.یکی از این راهها استفاده از مجموعه ای از مستطیلها است. ابتدا بازه به چندین جزء بوسیله انتخاب چهار نقطه x_1 تا x_4 روی محورx ها تقسیم می کنیم. و عرض مستطیل ها را بر این نقاط بنا می کنیم.(همانند شکل) با جمع مساحت مستطیل ها می توان مساحت زیر نمودار را تخمین زد.

برای محاسبه ارتفاع مستطیل ها، نقطه ای مانند x_i را انتخاب می‌کنیم. ارتفاع ما به $f(x_i)$ نزدیک خواهد بود.



ولی این ارتفاع دقیق نیست. بنابراین نقطه ای مانند ϵ_i بین های x_i متوالی انتخاب می کنیم. در این حالت $f(\epsilon_i)$ مقدار دقیق تری را اختیار می کند. اگر

$\Delta_i = (x_i + 1) - x_i$

تعریف کنیم در این صورت جمع مساحت مستطیل ها برابر خواهد بود با

$$s = \sum_{i=1}^{N} f(\epsilon_i)\Delta_i$$

مجموع ریمان:

مجموع مساحت مستطیل های که ما برای تخمین مساحت زیر منحنی استفاده می کنیم. مجموع ریمان نامیده می شود.
حال با مثالی این مجموع را توضیح می دهیم:

تابع:

$$\boxed{f(x) = \frac{atan(x).sin(x)}{x} + 2}$$

نقاط شروع و پایان بازه:

$a = 2$ و $b = 8$

تعداد مستطیل ها (یا تعداد بازه ها):

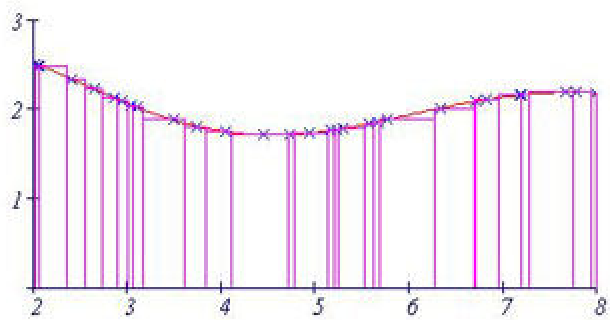
$n = 30$

با استفاده از مجموع ریمان: $s=\sum_{k=1}^{N} f(\epsilon_k)\Delta_k$

خواهیم داشت:

11.924959 =مقدار دقیق مساحت
11.8740138= مساحت محاسبه شده

بین مجموع ریمان و مقدار دقیق جواب اگر مقایسه ای انجام دهید
در این صورت مقدار خطای با برابر خواهد بود با:
$$|s-exact|=0.051$$
همانطور که مشاهده شد مستطیل ها به صورت رندومی تولید شده اند و تعداد آنها محدود است. حال به نظر شما اگر تعداد مستطیلها یعنی nرا افزایش دهیم و مستطیل ها، حالت منظم به خود بگیرند چه اتفاقی خواهد افتاد. البته توجه کنید که nهای مختلف، مجموع ریمان مختلفی تولید می کنند.



مثال:
می خواهیم مجموع ریمان برای مساحت زیر نمودار منحنی $f(x)=x^{x-1}$ دربازه $[1,2]$ را پیدا کنیم

1- بازه را به 5 قسمت، از x_1 تا x_2 تقسیم می کنیم:

2- عرض مستطیل ها را پیدا می کنیم.
$$\Delta_1=x_1-1$$
$$\Delta_2=x_2-x_1$$
تا
$$\Delta_5=2-x_5$$

3- نقاط ϵ_iرا در بین x_iها برای پیدا کردم ارتفاع مستطیل که برابر با $f(\epsilon_i)$ خواهد بود، قرار می دهیم در این صورت:

$$h_1 = f(\epsilon_1)$$

$$h_2 = f(\epsilon_5)$$

تا

$$h_5 = f(\epsilon_5)$$

4- پیدا کردن مساحت 5 مستطیل:

$A_1 = f(\epsilon_1).\Delta_1$ تا $A_5 = f(\epsilon_5).\Delta_5$ را پیدا میکنیم.

5- مساحت های بدست آمده را با هم جمع می کنیم:

$$\boxed{s = \sum_{i=1}^{5} A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5}$$

انتگرال ریمان:

ممکن است تا اینجا به این نکته رسیده اید که هر چه قدرعددn (یعنی تعداد مستطیلها) بیشتر باشد مجموع ریمان به یک عدد ،همگرا میشود. یعنی حد گرفتن از مجموع ریمان وقتی که n بسیار بزرگ است مساحت زیر نمودار را به ما می دهد.

تعریف انتگرال ریمان:

اگر f تابعی باشد که دربازه $[0,1]$ تعریف شده است در این صورت مجموع ریمان تابع f در بازه $[0,1]$ وقتی که n به سمت بی نهایت می رود،همگرا به یک مقدار محدود مانند A خواهد بود.

$$\lim_{n\to\infty} s = \sum_{i=1}^{n} f(\epsilon_i)\Delta_i = \int_a^b f(x)\,dx$$