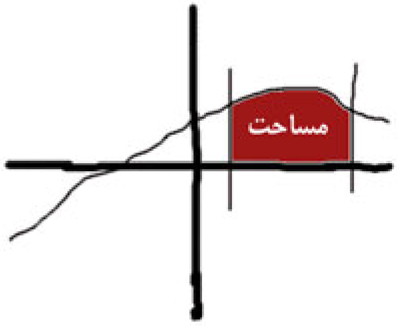
در [حساب دیفرانسیل و انتگرال](#) ، از انتگرال یک [تابع](#) برای عمومیت دادن به محاسبه [مساحت](#) ، [حجم](#) ، [جرم](#) یک تابع استفاده می شود. فرایند پیدا کردن جواب انتگرال را انتگرال گیری گویند.البته تعاریف متعددی برای انتگرال گیری وجود دارد ولی در هر حال جواب مشابه ای از این تعاریف بدست می آید. انتگرال یک تابع مثبت پیوسته در بازه (a,b) در واقع پیدا کردن مساحت بین خطوط x=10 , x=0 و خم منفی F است . پس انتگرال F بین aو b در واقع مساحت زیر نمودار است. اولین بار [لایب نیتس](#) نماد استانداری برای انتگرال معرفی کرد و به عنوان مثال انتگرال f بین a و b رابه صورت $\int_a^b f(x)\,dx$ نشان می دهند علامت $\int$ ،انتگرال گیری از تابع f را نشان می دهند ،aو b نقاط ابتدا و انتهای بازه هستند و f تابعی انتگرال پذیر است و dx نمادی برای متغیر انتگرال گیری است .



انتگرال یک تابع مساحت زیر نمودار آن تابع است .

از لحاظ تاریخی dx یک کمیت بی نهایت کوچک را نشان می دهد. هر چند در تئوریهای جدید، انتگرال گیری بر پایه متفاوتی
پایه گذاری شده است به عنوان مثال تابع f را بین x=0 تا x=10 در نظر بگیرید ،مساحت زیر نمودار در واقع مساحت مستطیل خواهدبود که بینx=0 ،x=10، y=0 ، y=3محصور شده است یعنی دارای طول 10 و عرض 3است پس مساحت آن برابر 30 خواهد بود .

اگر تابعی دارای انتگرال باشد به آن انتگرال پذیر گویند و تابعی که از انتگرال گیری از یک تابع حاصل می شود تابع اولیه گویند . اگر انتگرال گیری از تابع در یک محدوده خاص باشند به آن **انتگرال معین** گویند که نتیجه آن یک عدد است ولی اگر محدوده آن مشخص نباشد به آن **انتگرال نامعین** گویند .

محاسبه انتگرال

اکثر روش های اساسی حل انتگرال بر پایه قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال بنا نهاده شده است که بر طبق آن داریم :

1.fتابعی در بازه (a,b) در نظر می گیریم .
2.پاد مشتق f را پیدا می کنیم که تابعی است مانند f که و داریم : $F' = f$
3.قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را در نظر می گیریم :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

بنابراین مقدار انتگرال ما برابر $F(b) - F(a)$ **خواهد بود .**

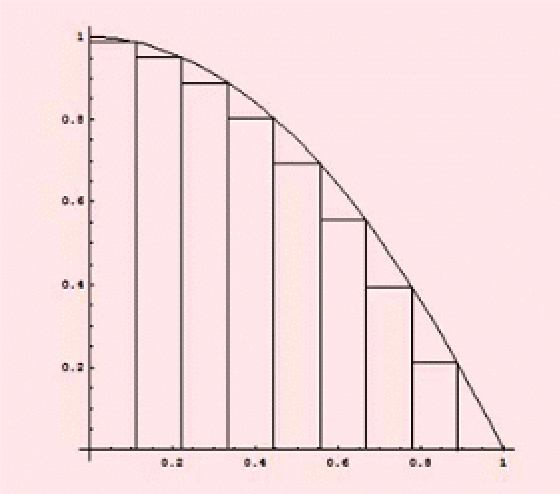
به این نکته توجه کنید که انتگرال واقعاً پاد مشتق نیست (یک عدد است) اما قضیه اساسی به ما اجازه می دهد تا از پاد مشتق برای محاسبه مقدار انتگرال استفاده کنیم .
معمولاً پیدا کردن پاد مشتق تابع f کار ساده ای نیست و نیاز به استفاده از تکنیکهای انتگرالگیری دارد این تکنیکها عبارتند از :

- [انتگرال گیری بوسیله تغیر متغیر](#)
- [انتگرال گیری جزء به جزء](#)

- انتگرال گیری با تغییر متغیر مثلثاتی
- انتگرال گیری بوسیله تجزیه کسرها

روش هایی دیگر نیز وجود دارد که برای محاسبه انتگرالهای معین به کار می رود همچنین می توان بعضی از انتگرال ها با ترفند هایی حل کرد برای مثال می توانید به انتگرال گاوسی مراجعه کنید .

تقریب انتگرالهای معین



محاسبه سطح زیر نمودار بوسیله مستطیل هایی زیر نمودار.
هر چه قدرعرض مستطیل ها کوچک میشوندمقدار دقیق تری
از مقدار انتگرال بدست میآید .

انتگرال هایی معین ممکن است با استفاده از روش های انتگرال گیری عددی ،تخمین زده شوند.یکی از عمومی ترین روش ها ،روش مستطیلی نامیده می شود در این روش ناحیه زیر نمودار تابع به یک سری مستطیل تبدیل شده و جمع مساحت آنها نشان دهنده مقدار تقریبی انتگرال است .

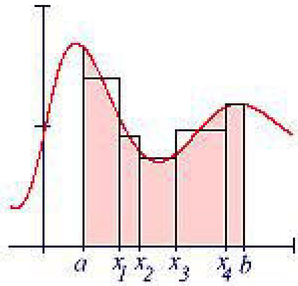
از دیگر روش هایی معروف برای تخمین مقدار انتگرال روش سیمپسون و روش ذوزنقه ای است. اگر چه روش های عددی مقدار دقیق انتگرال را به ما نمی دهند ولی در بعضی از مواقع که انتگرال تابعی قابل حل نیست یا حل آن مشکل است کمک زیادی به ما می کند .

تعریف های انتگرال

از مهم ترین تعاریف در انتگرال می توان از انتگرال ریمان و انتگرال لبسکی (**lebesgue**)است .انتگرال ریمان بوسیله برنهارد ریمان در سال 1854 ارئه شد که تعریف دقیقی را از انتگرال ارائه می داد تعریف دیگر را هنری لبسکی ارائه داد که طبق این تعریف شرایط تعویض پذیری حد و انتگرال با شرط مساوی ماندن عبارت، ارائه می کرد .
از دیگر تعاریف ارائه شده در زمینه انتگرال میتوان به انتگرال riemann-stieltjes اشاره کرد. پس به طور خلاصه سه تعریف زیر از مهمترین تعاریف انتگرال میباشند :

همان طور که می توانیم پیدا کردن مساحت زیر یک نمودار منحنی، کار ساده ای نیست. چونسطح زیر منحنی یک شکل منظم نیست پس هیچ فرمول تعریف شده ای برای پیدا کردن مساحت آن وجود ندارد. بنابراین ما به دنبال راهی برای حل این مشکل هستیم .
حال به دنبال راهی برای تخمین مساحت زیر منحنی هستیم.یکی از این راهها استفاده از مجموعه ای از مستطیلها است. ابتدا بازه به چندین جزء بوسیله انتخاب چهار نقطه x_1 تا x_4 روی محورx ها تقسیم می کنیم. و عرض مستطیل ها را بر این نقاط بنا می کنیم.(همانند شکل) با جمع مساحت مستطیل ها می توان مساحت زیر نمودار را تخمین زد .

برای محاسبه ارتفاع مستطیل ها، نقطه ای مانند x_i را انتخاب می کنیم. ارتفاع ما به $f(x_i)$ نزدیک خواهد



بود .

ولی این ارتفاع دقیق نیست. بنابراین نقطه ای مانند ϵ_i بین های x_i متوالی انتخاب می کنیم. در این حالت $f(\epsilon_i)$ مقدار دقیق تری را اختیار می کند. اگر $\Delta_i = (x_i + 1) - x_i$ تعریف کنیم در این صورت جمع مساحت مستطیل ها برابر خواهد بود با

$$\boxed{s = \sum_{i=1}^{N} f(\epsilon_i)\Delta_i}$$

مجموع ریمان :

مجموع مساحت مستطیل های که ما برای تخمین مساحت زیر منحنی استفاده می کنیم. مجموع ریمان نامیده می شود. حال با مثالی این مجموع را توضیح می دهیم :

تابع :

$$\boxed{f(x) = \frac{atan(x).sin(x)}{x} + 2}$$

نقاط شروع و پایان بازه:

$$a = 2 \text{ و } b = 8$$

تعداد مستطیل ها (یا تعداد بازه ها)

:

$$n = 30$$

با استفاده از مجموع ریمان : $$s = \sum_{k=1}^{N} f(\epsilon_k)\Delta_k$$

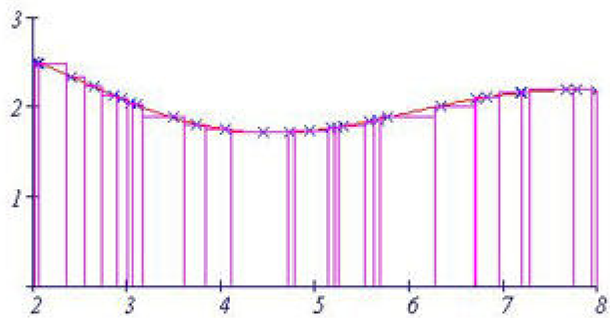
خواهیم داشت :

= 11.924959مقدار دقیق مساحت
=11.8740138مساحت محاسبه شده

بین مجموع ریمان و مقدار دقیق جواب اگر مقایسه ای انجام دهید
در این صورت مقدار خطای با برابر خواهد بود با :

$$\boxed{|s - exact| = 0.051}$$

همانطور که مشاهده شد مستطیل ها به صورت رندومی تولید شده اند و تعداد آنها محدود است. حال به نظر شما اگر تعداد مستطیلها یعنیn را افزایش دهیم و مستطیل ها، حالت منظم به خود بگیرند چه اتفاقی خواهد افتاد.البته توجه کنید کهn های مختلف، مجموع ریمان مختلفی تولید می کنند .



مثال :

می خواهیم مجموع ریمان برای مساحت زیر نمودار منحنی $f(x) = x^{x-1}$ دربازه $[1, 2]$ را پیدا کنیم
(1بازه را به 5 قسمت، از x_1 تا x_2 تقسیم می کنیم :
(2عرض مستطیل ها را پیدا می کنیم .

$$\Delta_1 = x_1 - 1$$

$$\Delta_2 = x_2 - x_1$$

تا

$$\Delta_5 = 2 - x_5$$

(3نقاط ϵ_i را در بین x_i ها برای پیدا کردم ارتفاع مستطیل که برابر با $f(\epsilon_i)$ خواهد بود، قرار می دهیم در این صورت :

$$h_1 = f(\epsilon_1)$$

$$h_2 = f(\epsilon_5)$$

تا

$$h_5 = f(\epsilon_5)$$

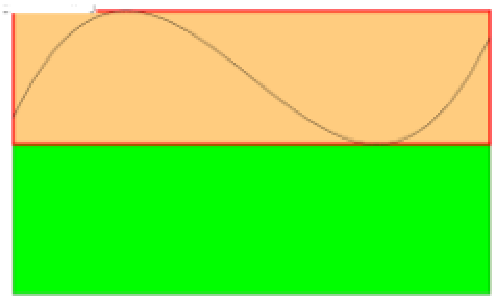
4)پیدا کردن مساحت 5 مستطیل :

$A_1 = f(\epsilon_1).\Delta_1$ تا $A_5 = f(\epsilon_5).\Delta_5$ را پیدا میکنیم .

5)مساحت های بدست آمده را با هم جمع می کنیم :

$$\boxed{s = \sum_{i=1}^{5} A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5}$$

انتگرال ریمان :



این شکل همگرایی مجموع ریمان
را نشان میدهدهر چه قدر بازه ها کوچکتر
و تعداد مستطیلها بیشتر میشود
مقدار)O حد مجموع بالا)و) U حد مجموع پایین(
به مقدار اصلی مساحت نزدیک خواهد شد .

ممکن است تا اینجا به این نکته رسیده اید که هر چه قدرعدد) nیعنی تعداد مستطیلها) بیشتر باشد مجموع ریمان به یک عدد ،همگرا میشود. یعنی حد گرفتن از مجموع ریمان وقتی که n بسیار بزرگ است مساحت زیر نمودار را به ما می دهد .

تعریف انتگرال ریمان :

اگر f تابعی باشد که دربازه $[0, 1]$ تعریف شده است در این صورت مجموع ریمان تابع fدر بازه $[0, 1]$ وقتی که n به سمت بی نهایت می رود،همگرا به یک مقدار محدود مانندA خواهد بود .

$$\lim_{n\to\infty} s = \sum_{i=1}^{n} f(\epsilon_i)\Delta_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

انتگرال دو گانه

همان‌طور که تعریف مساحت زیر منحنی انگیزه تعریف انتگرال توابع با یک متغیر است، مفهوم حجم زیر یک سطح نیز ما را به تعریف انتگرال توابع با دو متغیر ، به نام انتگرال دو گانه ، رهنمون می کند. انتگرال دو گانه بسیار شبیه انتگرال می‌باشد، با این تفاوت که در این نوع انتگرال قلمرو در صفحه دو بعدی xoy واقع شده است .

انتگرال دو گانه روی نواحی مستطیلی

فرض می کنیم $f(x,y)$ بر ناحیه ی مستطیلی R زیر تعریف شود :

$$R \ : \ a \le x \le b \ , \ c \le y \le d$$

و فرض می کنیم R با شبکه ای از خطوط موازی با محور های x و y پوشیده شده باشد. مساحت هر کدام از این قطعه های کوچک برابر است با : $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$

این قطعات را شماره گذاری می کنیم و در هر قطعه ای مانند ΔA_k نقطه ی (x_k, y_k) را بر می گزینیم و مجموع زیر را تشکیل می دهیم :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

اگر f در سراسر R پیوسته باشد، با کوچک کردن خانه های شبکه یعنی میل دادن Δx و Δy به صفر،مجموع مشخص شده در رابطه ی فوق به حدی میل می کند که آن را **انتگرال دوگانه ی** f روی R می نامیم .
نماد انتگرال دوگانه عبارت است از :

$$\int\int_R f(x,y)\,dA$$

یا

$$\int\int_R f(x,y)\,dx \cdot dy$$

بنابر این :

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \lim_{\Delta A\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\cdot \Delta A_k$$

قضیه فوبینی (صورت اول):

اگر $f(x,y)$ بر ناحیه مستطیلی $R\ :\ a\leq x\leq b\ ,\ c\leq y\leq d$ پیوسته باشد، داریم :

$$\int\int_R f(x,y)\,dA=\int_c^d\int_a^b\ f(x,y)\cdot dx\cdot dy=\int_a^b\int_c^d\ f(x,y)\cdot dy\cdot dx$$

قضیه فوبینی (صورت قوی تر):

فرض می کنیم $f(x,y)$ روی ناحیه ای چون R پیوسته باشد .

1. اگرتعریف R عبارت باشد از : $a\leq x\leq b$، $f_1(x)\leq y\leq f_2(x)$ با این شرط که f_1 و f_2 بر $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه :

$$\int\int_R f(x,y)\,dx\cdot dy=\int_a^b\int_{f_1(x)}^{f_2(x)}\ f(x,y)\cdot dy\cdot dx$$

1. اگرتعریف R عبارت باشد از : $c\leq y\leq d$، $g_1(y)\leq x\leq g_2(y)$ با این شرط که g_1 و g_2 بر $[c,d]$ پیوسته باشد، آنگاه :

$$\int\int_R f(x,y)\,dx\cdot dy=\int_c^d\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\ f(x,y)\cdot dx\cdot dy$$

دامنه در انتگرال دو گانه

دو دامنه در انتگرال دو گانه وجود دارد :

1. دامنه منظم: دامنه‌ای است که هر خط موازی محورهای مختصات محیط آن را حداکثر در دو نقطه قطع کند. مانند مربع ، مثلث ، دایره .در این نوع دامنه تعویض حدود انتگرال نسبتا ساده است .
2. دامنه غیرمنظم: دامنه‌ای که هر خط موازی محورهای مختصات آن را در بیش از دو نقطه قطع کند مانند سطح بین دو دایره یا دو مربع. در این نوع دامنه ها تعویض حدود باید با احتیاط صورت گیرد .

برخی از انواع دامنه‌های منظم در انتگرال دو گانه

1. $D:\ a \le x \le b\ ;\ c \le y \le d$: این دامنه به شکل مربع یا مستطیلی است که اضلاع آن موازی محورهای مختصات است .
2. دامنه‌های مثلثی مانند : $D:\ 0 \le y \le x\ ;\ 0 \le x \le 1$ و در صورت تعویض انتگرال گیری می‌توان آن را به صورت $D:\ y \le x \le 1\ ;\ 0 \le y \le 1$ نوشت .
3. دامنه‌های دایره‌ای؛ دامنه‌های دایره‌ای در دستگاه دکارتی و قطبی به صورت زیر نوشته می‌شوند :

دایره‌ای که مرکز آن در مبدا مختصات و شعاع آن r باشد .

1. دکارتی :

$$D:\ -\sqrt{r^2-x^2} \le y \le \sqrt{r^2-x^2}\ ;\ -r \le x \le r$$

2. قطبی :

$$D:\ 0 \le \rho \le r\ ;\ 0 \le \theta \le 2\cdot\pi$$

تعویض انتگرال ها ی دوگانه

مانند مشتقات جزئی، انتگرال نیز دارای ترتیب است. وقتی انتگرال به صورت $\int\int_R f(x,y)\,dx\cdot dy$ باشد، یعنی باید ابتدا y را ثابت فرض کرده و نسبت به متغیر x انتگرال گرفت و در مرحله دوم نسبت به y انتگرال بگیریم .
چنانچه حدود به صورت $y_1(x) \le y \le y_2(x)$ و $a \le x \le b$ باشد می‌توانیم در صورت لزوم x را بر حسب تابعی از y نوشته و حدود y را از روی شکل دامنه بدست آورده و در انتگرال قرار دهیم یا :
$x_1(y) \le x \le x_2(y)$ و $c \le y \le d$

که در این صورت می‌توان نوشت :

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\cdot dx = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\cdot dy$$

ویژگی‌های انتگرال دوگانه

1. اگر ناحیه بسته و محدود R اجتماع دو ناحیه بسته و محدود R_2, R_1 باشد، به طوری که تنها در نقاط مرزی مشترک باشند، آنگاه انتگرال دوگانه تابع

$f(x,y)$ در ناحیه R برابر است با انتگرال دوگانه تابع f در R_1 بعلاوه انتگرال دوگانه تابع f در R_2 .

1. اگر $f(x,y)$ و $g(x,y)$ روی ناحیه بسته و محدود R پیوسته باشند آنگاه انتگرال دوگانه مجموع این دو تابع برابر است با مجموع انتگرال‌های هر کدام از این توابع .

1. اگر انتگرال دو گانه $f(x,y)$ روی R وجود داشته و c عدد حقیقی باشد. آنگاه انتگرال دوگانه $c \cdot f(x,y)$ برابر است با حاصلضرب c در انتگرال دوگانه $f(x,y)$.

انتگرال دوگانه درمختصات قطبی

گاهی محاسبه یک انتگرال دوگانه در مختصات قطبی آسانتر از محاسبه آن درمختصات دکارتی است .
فرض کنیم ناحیه R در مختصات قطبی، بین دو نمودار هموار $r = g_1(\theta)$ و $r = g_2(\theta)$ محدود شده باشد که در آن $\alpha < \theta < \beta$ باشد در این صورت انتگرال دوگانه را می‌توان توسط انتگرال مکرر زیر نشان داد :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta) \cdot r \, dr \cdot d\theta$$

تبدیل انتگرال دوگانه در مختصات دکارتی به انتگرال دوگانه در مختصات قطبی

برای تبدیل یک انتگرال مکرر در مختصات دکارتی به یک انتگرال مکرر در مختصات قطبی، به جای x، y و $dx \cdot dy$ (یا $dy \cdot dx$ (به ترتیب $r \cdot cos(\theta)$ ، $r \cdot sin(\theta)$ و $r \cdot dr \cdot d\theta$ (یا $r \cdot d\theta \cdot dr$ (قرار داده و حدود انتگرال گیری را به مختصات قطبی تبدیل می‌کنیم و در نهایت عملیات انتگرال گیری را بر حسب پارامتر های r و θ انجام می دهیم .

انتگرال سه‌گانه

انتگرال سه‌گانه در مورد توابع سه متغیره ی حقیقی تعریف می‌شود. این تعریف مشابه با تعریف انتگرال دوگانه توابع دو متغیره است. در حالت کلی $a \leq x \leq b$ ،

$f_1(x) \le y \le f_2(x)$ و $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$ است .
در دستگاه ها ی مختصات مختلف، انتگرال سه گانه به صورت زیر نوشته می‌شود :

1. دستگاه مختصات دکارتی :

$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} F(x,y,z)\, dz \cdot dy \cdot dx$$

2. دستگاه مختصات استوانه‌ای: همان طور که محاسبه برخی از انتگرال های دوگانه در مختصات قطبی آسانتر از محاسبه آنها در مختصات دکارتی است، برخی از انتگرال های سه‌گانه نیز در دستگاه غیر دکارتی ساده‌تر محاسبه می‌شوند. یکی از این دستگاههای مختصات، مختصات استوانه‌ای است .

فرض می‌کنیم (x,y,z) مختصات دکارتی نقطه ی P در فضا باشد. اگر (r,θ) مختصات قطبی نقطه ی (x,y) باشد، آنگاه (r,θ,z) را مختصات استوانه‌ی P می‌نامیم .

رابطه بین مختصات دکارتی، استوانه‌ای و کروی

$$x = r \cdot cos(\theta) = \rho \cdot sin(\phi) \cdot cos(\theta)$$

$$y = r \cdot sin(\theta) = \rho \cdot sin(\phi) \cdot sin(\theta)$$

$$z = \rho \cdot cos(\phi)$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$