# اعداد مختلط


## آشنایی با اعداد انگاری

یکی از مهمترین ویژگیهای اعداد حقیقی این است که در آنها اعمال: جمع، تفریق، ضرب و تقسیم (به استثنای تقسیم برصفر) را می توان انجام داد. بدین سبب است که معادله خطی کلی

$$ax+b=0 \qquad (a \neq 0)$$

را می‌توان در حوزه اعداد حقیقی حل کرد و چنین نوشت: $x=-b/a$. ولی وضعیت در مورد معادله درجه دوم کاملاً متفاوت است. به عنوان مثال معادله درجه دوم

$$x^2+1=0$$

را در حوزه اعداد حقیقی نمی‌توان حل کرد و $x$ را به دست آورد. مربع یک عدد حقیقی نمی‌تواند عددی منفی باشد. بنابراین

به ازای هر عدد حقیقی $x$ ، $x^2+1 \geq 1 > 0$

از این رو به ازای هر عدد حقیقی $x$ ، معادله $x^2+1=0$ ممتنع است. در چنین وضعیتی حوزه دستگاه اعداد حقیقی را طور توسعه می‌دهیم که چنین معادله‌ای حل شدنی باشد. مثلاً برای یک طفل دبستانی که فقط اعدادی درست مثبت را می‌شناسد معادله ای مانند

۷ +   = ۳

نا معقول می‌نماید. و برای کسانی که فقط اعداد صحیح را می‌شناسد معادلـه‌هـای $5x=2$ و $x^2=17$ جواب ندارند. اما با توسیع دستگاه اعداد به صورتی که اعدادی منفی، کسری و اصم را نیز در برگیرد، این معادلات به ترتیب جوابهای $\pm\sqrt{17},2/5,-4$ را خواهند داشت.

وضعیت برای معادله $x^2+1=0$ تقریباً همین طور است. دستگاه اعداد را چنان توسعه می‌دهـیم تا اعدادی مثل $\sqrt{-1}$، یعنی عددی را که مربعش ۱- است، نیز در بر گیرد. این گونه اعـداد بـا احـساس شهودی ما اصلاً جور در نمی‌آیند و در گذشته بسیاری از ریاضیدانان با معرفی این گونه هیولاها مخالفت داشتند و از این رو آنها را اعداد انگاری نامیده اند. وضعیت تا سده هیجدهم به همین منوال بود تا اینکه لئونهارت اویلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) با کارهای استادانه روی اعداد انگاری نتایج متعدد جـالبی بدسـت آورد. ک.ف گاوس(۱۷۷۷- ۱۸۵۵ ) با معرفی اعداد انگاری به صورت نقاط یک صفحه نام تازه اعداد مخـتلط را بر آنها نهاد و از آنها برای یافتن نتایجی چشمگیر از نظریه اعداد استفاده نمود. از ایـن طریـق عـضویت اعداد مختلط را در سلسه اعداد مسجل ساخت. تقریباً در همـان زمـان اُ.ل. کوشـی ( ۱۷۸۹ – ۱۸۵۷ )، هنگام تلاش در پیدا کردن روشی یکنواخت برای محاسبه انتگرال هـای معـین،حـساب دیفرانـسیل و انتگرال توابع با متغیرهای مختلط را بررسی کرد. این امر سرآغاز نظریه توابعی بود که زمینـه مـساعدی برای کشف توابع بیضوی از سوی ن.ه. آبل (۱۸۰۲ – ۱۸۲۹ ) و کـارل گوسـتاو یـاکوبی (۱۸۰۴ – ۱۸۵۱) را فراهم ساخت. علاوه بر این، بسط هندسه تصویری نشان داد که استفاده از اعداد مختلط در هندسه نیـز امری اجتناب ناپذیر است. پیشرفت تحقیقات روشن کرده است که برای اینکـه ریاضـیات، حتـی فقـط حساب دیفرانسیل و انتگرال را به خوبی بفهمیم، محدودیت غیر طبیعی حوزه اعداد حقیقی به ما حکـم می‌کند که برای دستیابی به مفاهیم یکنواختی و همسازی، اعداد مختلط را نیز دخالت دهیم.

رسم بر این است که $i$، حرف اول واژه $imaginary$ (انگاری) را برای $\sqrt{-1}$ به کار می‌بریم. بدین ترتیب اعداد مختلط اعدادی هستند به شکل $a+ib$ که $b,a$ اعدادی هستند حقیقی و محاسبه با آنها همانند محاسبه با اعداد حقیقی است، با در نظر گرفتن اینکه به جای $i^2$ باید ۱- قرار داد. مثلاً

$$(a+ib)\pm(c+id)=(a\pm c)+i(b\pm d)$$

$$(a+ib).(c+id)=ac+ibc+iad+i^2bd$$

$$=(ac-bd)+i(bc+ad)$$

منظوراز تقسیم دو عدد مختلط یعنی $(a+ib)/(c+id)$ یافتن عددی است مثل $x+iy$ که در تساوی

$$a+ib=(c+id).(x+iy)$$

صدق نماید، پس از محاسبه رابطه بالا داریم

$$a+ib=(cx-dy)+i(dx+cy)$$

پس کافی است اعداد $y,x$ را چنان پیدا کنیم که در روابط $dx+cy=b, cx-dy=a$ صدق کنند. این دستگاه معادلات یک جواب یکتای زیر را دارد.

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2} \quad , \quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

مگر آنکه $c=d=0$. بنابراین

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

البته همین نتیجه را می‌توانستیم از ضرب صورت و مخرج کسر $(a+ib)/(c+id)$ در $c-id$ نیز به دست آوریم.

اما چرا چنین اعمالی موجه‌اند؟ آیا جمع یک عدد حقیقی $a$ بـا یـک عـدد انگـاری $ib$ ویـافتن $a+ib$ همانند حاصل جمع $17m^2$ با ۴ کیلوگرم و یافتن $21^{\circ}C$ نیست؟ همین طـور، $x^2+1=0$، دو جواب دارد ولی $i$ کدامیک از آنها است؟ توجه کنید که $x^2-1=0$ نیز دو جواب دارد که جـواب دارد که جواب مثبت آن ۱ است و جواب دیگر آن ۱-. اما آیا گفتن نامثبت است معنی دارد؟

## تعریف اعداد مختلط

برای پاسخگویی به ایراد اخیر، اکنون تعریفی صوری از اعداد مختلط ارائه می‌دهـیم. ولـی ابتـدا ویژگیهای دستگاه حقیقی $R$ را یاد آور می‌شویم.

$I.$ ویژگیهای مربوط به عمل جمع

دو عدد حقیقی دلخواه $a$ و $b$ عدد سوم یکتایی را عین می کنند به نام مجموع آنها کـه با $a+b$ نمایانده می‌شود، با ویژگیهای زیرین:

$A_1$: قانون جابجایی : به ازای هر دو عدد $a,b\in \Upsilon$ ، $a+b=b+a$

$A_2$: قانون شرکتپذیری: به ازای هرسه عدد $a,b\in \Upsilon$،

$(a+b)+c=a+(b+c)$

$A_3$: عنصر همانی در جمع : عدد حقیقی یکتایی که با $0$ نمایانده مـی‌شـود وجـود دارد چنان که:

به ازای یک مقدار $a\in \Upsilon$ $\quad a+0=0+a=a,$

$A_4$: عکس جمعی : به ازای هر عدد $a \in \Upsilon$، منحصراً یک عدد $a \in \Upsilon$ وجود دارد چنان

که: $a + x = x + a = 0$

این جواب یکتا را با $-a$ نمایش می‌دهند.

$II$. ویژگیهای مربوط به عمل ضرب

دو عدد حقیقی دلخواه $b, a$ منحصراً یک عدد سومی بـه نـام حاصلـضرب را مـشخص می‌سازند که با $ab$ نمایش داده می‌شود، با ویژگیهای زیرین:

$M_1$: قانون جابه جایی: به ازای همه مقادیر $a, b \in \Upsilon$، $ab = ba$

$M_2$: قانون شرکت پذیری: به ازای همه مقادیر $a, b, c \in \Upsilon$، $(ab)c = a(bc)$

$M_3$: عنصر همانی در ضرب: عددد حقیقی یکتایی وجود دارد که با ۱ نمایانده می‌شود،

به طوری که به ازای همه مقادیر $a.1 = 1.a = a, \quad a \in \Upsilon$

$M_4$: عکس ضربی: به ازای هر $a \in \Upsilon$، با $a \neq 0$ عدد یکتایی مانند $x$ وجود دارد چنان

که: $ax = xa = 1$

این جواب یکتا را با $1/a$ یا $a^{-1}$ نشان می‌دهند.

$III$. قانون توزیعپذیری

به ازای همه مقادیر $a(b+c) = ab + ac, a, b, c \in \Upsilon$

هر مجموعه ای که این ویژگیها را داشته باشد، هیات نامیده می‌شود. بدین ترتیب مجموعه اعداد حقیقی $R$، یک هیات است. همین طور، مجموعه $Q$ مرکب از تمام اعداد گویا یک هیات است، ولـی نـه مجموعه همه اعداد درست $'$ یک هیات تشکیل می‌دهند و نه مجموعه اعداد طبیعی $\infty$.

در بخش قبل گفتیم اعداد مختلط به صورت $a+ib$ هستند که $b,a$ اعدادی حقیقی اند. از این رو اساساً اعداد مختلط عبارت اند از زوج اعداد حقیقی $b,a$. بدین ترتیب یک تعریف رسمی به صورت زیر در می‌آوریم.

تعریف ۱. یک عدد مختلط زوج مرتب $(a,b)$ از اعداد حقیقی است با ویژگیهای زیر: دو عدد مختلط $(c,d),(a,b)$ فقط و فقط وقتی برابرند که $b=d, a=c$. مجموع و حاصلضرب دو عدد مختلط $(c,d),(a,b)$ چنین تعریف می‌شوند:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b).(c,d)=(ac-bd,bc+ad)$$

توجه کنید که تعریف تساوی اعداد مختلط ویژگیهای زیر را دارد:

الف. انعکاسی: به ازای هر عدد مختلط $(a,b)$، $(a,b)=(a,b)$

ب. تقارن: $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow (c,d)=(a,b)$

ج. ترایایی : $(a,b)=(c,d),(c,d)=(e,f) \Rightarrow (a,b)=(e,f)$

قضیه۱. بااعمال جمع و ضرب به صورتی که در بالا تعریف شدند، مجموعه $C$ مرکب از همه اعداد مختلط یک هیات تشکیل می‌دهند.

برهان. یک تمرین عملی است.

حال اعداد مختلط به شکل $(a,0)$ را در نظر می‌گیریم، پس

$$(a,0)\pm(b,0)=(a\pm b,0)$$

$$(a,0).(b,0)=(ab,0)$$

$$\frac{(a,0)}{(b,0)}=\left(\frac{a}{b},0\right)$$

( به شرط اینکه $b\neq 0$ )

**که همانند اعمال میان دو عدد حقیقی $b,a$ هستند. به عبارت دیگر اگر عدد مختلط $(a,0)$ را به عنوان عدد حقیقی $a$ در نظر بگیریم هیچگونه اختلافی پیش نخواهد آمد. درنتیجه اعداد حقیقی را اعداد مختلط خاصی می‌گیریم که مولفه دوم آنها صفر هستند.**

**اکنون عدد مختلط $(0,1)$ را در نظر می‌گیریم. داریم**

$$(0,1)^2=(0,1).(0,1)=(-1,0)=-1$$

**یعنی عدد مختلط $(0,1)$ متناظر با $\sqrt{-1}$ در بخش قبلی است. طبیعی است که مربع $(0,-1)$ نیز ۱- است، ولی چنانچه بنویسیم $i=(0,1)$، آن گاه عدد مختلط دلخواه $(a,b)$ را می‌توانیم چنین بنویسیم**

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(0,1).(b,0)$$

**که توجیه کننده عدد مختلط $a+ib$ است.**

**عدد مختلط $i$ را واحد انگاری می‌نامند. پس در هر عدد مختلط**

$$\alpha=(a,b)=a+ib\qquad(a,b\in\Upsilon)$$

**$a$ را جزء حقیقی عدد مختلط $\alpha$ می‌نامند و آن را با $\Re\alpha$ نمایش می‌دهند؛ همین طور $b$ را جزء انگاری عدد $\alpha$ خواننده و آن را با $\Im\alpha$ نشان می‌دهند. از این رو اعداد حقیقی، اعداد مختلطی هستند که جزء**

انگاری آنها $0$است. از سوی دیگر اعداد مختلطی را که جزء حقیقی شان $0$ باشد اعداد انگــاری محــض می‌نامند. دقیقاً توجه نمایید که هر دو جزء حقیقی و انگاری اعداد مختلط، اعداد حقیقی‌اند.

برای یک عدد مختلط $\alpha = (a,b) = a + ib$ عدد مختلط $(a,-b) = a - ib$ را مزدوج مختلط $\alpha$ یا مزدوج عدد مختلط $\alpha$ می نامند و آن را با $\bar{\alpha}$ نمایش می دهند. به آسانی می‌توان روابــط زیــررا تحقیــق نمود:

$$\overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}$$

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}.\bar{\beta}$$

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \quad (\beta \neq 0)$$

$$\Re\alpha = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} \quad \Im\alpha = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2\imath}$$

برای هر عدد مختلط $\alpha = a + ib$ $(a, b \in \Upsilon)$، حاصلضرب

$$\alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2$$

همواره عددی حقیق و نامنفی است. ریشه دوم نامنفی این عدد را کالبد یا قدر مطلق عدد مختلط $\alpha$ گویند و آن را با $|\alpha|$ نمایش می‌دهند. از این رو

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} = (\alpha\bar{\alpha})^{1/2}$$

قضیه ۲. $|\alpha| = 0$، اگر و فقط اگر $\alpha = 0$ .

برهان. می‌نویسیم $\alpha = a + ib, (a, b \in R)$، پس $|\alpha|^2 = a^2 + b^2$ بنابراین

$$|\alpha| = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0$$

**اما به ازای هر دو عدد حقیقی $b, a$ ، $b^2 \geq 0, a^2 \geq 0$ بنابراین**

$$a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 0, b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0, b = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0$$

**توجه کنید که در اینجا ما از این واقعیت که $b, a$ اعدادی حقیقی هستند استفاده نمودیم. در غیر این صورت $a^2 + b^2 = 0$ مستلزم تساوی های $a = b = 0$ نیست. مثلاً اگر بنویسیم $b = i, a = 1$، آنگاه $a^2 + b^2 = 0$ ولی نه تساوی $a = 0$ برقرار است و نه تساوی $b = 0$.**

**به آسانی می‌توان ثابت نمود که:**

$$|\Re\alpha| \leq |\alpha|, |\Im| \leq |\alpha|, |\bar{\alpha}| = |\alpha|$$

$|\alpha\beta| = |\alpha|.|\beta|$ ( **به خصوص** $|-\alpha| = |\alpha|$ )

$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ ( **به شرط** $\beta \neq 0$ )

**قضیه ۳. به ازای هر دو عدد مختلط $\beta, \alpha$**

$\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ **یا** $\beta = 0$

**و یا هم ارز با آن**

$$\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0, \beta \neq 0$$

**برهان. بنابر قضیه قبلی**

$$\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow |\alpha\beta| = 0$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|.|\beta| = 0$$

چون $|\alpha|,|\beta|$ اعداد حقیقی اند

$|\alpha|.|\beta| = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = 0$ یا $|\beta| = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = 0$ یا $\beta = 0$

**توجه.** در مجموعه ای که عمل ضرب در آن تعریف شده است، اگر $\alpha\beta = 0$ ولی $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$، آنگاه $\beta,\alpha$ را مقسوم علیه های صفر گویند. قضیه قبلی مبین آن است که هیات اعداد مختلط $C$ مقسوم علیه صفر ندارد.

دستگاههایی جبری وجود دارند که مقسوم علیه های صفر دارند. به طور مثال مجموعه همه ماتریسهای $2 \times 2$ به صورت

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; \text{a,b,c,d} \in \Upsilon \right\}$$

را در نظر می‌گیریم. جمع و ضرب در این مجموعه به ترتیب چنین تعریف می‌شوند.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ cc'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

عنصر صفر عبارت است از

$$\text{o} = \begin{pmatrix} \text{o} & \text{o} \\ \text{o} & \text{o} \end{pmatrix}$$

پس با اینکه

$$\begin{pmatrix} \text{o} & 1 \\ \text{o} & 2 \end{pmatrix} \neq \text{o} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \text{o} & \text{o} \end{pmatrix} \neq \text{o}$$

ولی داریم

$$\begin{pmatrix} o & 1 \\ o & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ o & o \end{pmatrix} = o$$

باید توجه داشت که در اثبات این قضیه از این موضوع استفاده شده است که هیات اعداد حقیقی

Υ ، مقسوم علیه صفر ندارد.

## اهمیت اعداد مختلط

در بخش قبل دیدیم که هر معادله درجه دوم در هیات اعداد مخـتلط $C$ جوابهـایی دارد. امـا در مورد معادله‌های درجه سوم، درجه چهارم و غیره چه؟ آیا هر بار که با معادله های درجـه بـالا سـروکار داریم باید دستگاه اعداد را توسعه دهیم؟ یکی از زیباییهای دستگاه اعداد مختلط در معتبر بودن قـضیه زیر است.

قضیه ۴. ( قضیه بنیادی جبر ). معادله چند جمله یی :

$$a.x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

که در آن ≤ $a_k \in$ $n \geq 1, .a_o \neq o, (k = 0,1,2,\dots,n)$ ، در ≤ جواب دارد. به عبارت دیگر

- ≤ از لحاظ جبری بسته است

معادله بالا را معادله چند جمله یی از درجه $n$ ( هنگامی که $a_o \neq o$ ) گویند. از قضیه بنیادی جبر نتیجه می‌شود که:

فرع ۱. معادله چند جمله یی، درجه $n$، با احتساب ریشه های مکرر، $n$ ریشه در ≤ دارد.

**مثال.** معادله درجه سوم $z^3+i=0$ را حل کنید.

**حل.** می‌نویسیم $z=u+iv\,,\left(u,v\in\Upsilon\right)$، پس، چون

$$\left(u+iv\right)^3=u^3+3iu^2v-3uv^2-iv^3$$

باید داشته باشیم

$$\begin{cases} u^3-3uv^2=0 \\ 3u^2-v^3+1=0 \end{cases}$$

از معادله اول نتیجه می‌شود

$$u(u^2-3v^2)=0$$

پس

$u=0$ یا $u^2-3v^2=0$

وقتی $u=0$، از معادله دوم نتیجه می‌شود:

$$v^3-1=0 \quad (v-1)\left(v^2+v+1\right)=0$$

چون $v\in\Upsilon$، $v^2+v+1\neq 0$، لذا $\therefore\ z=i, v=1$ هنگامی که $u-3v^2=0$ ، $u=\pm\sqrt{3}v$. از

قرار دادن این مقدار در معادله دوم خواهیم داشت

$$3\left(\pm\sqrt{3}v\right)^2v-v^3+1=0 \text{ ، یعنی } 8v^3+1=0$$

$$\therefore (2v+1)\left(4v^2-2v+1\right)=0$$

چون $v\in\Upsilon$ $4v^2-2v+1\neq 0$ و لذا $v=-1/2$ پس

$$u = \mu\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad z = \frac{\pm\sqrt{3} - i}{2}$$

**بنابراین سه ریشه به دست می‌آید**

$$z = i, \quad \frac{\pm\sqrt{3} - i}{2}$$

**گ.ف گاوس (۱۸۵۵-۱۷۷۷ ) دررساله اش چندین استدلال برای قضیه بنیادی جبـــر داده اســـت. خوانندگان علاقه مند به این استدلالها می‌توانند به کتابهای درسی استانده در آنالیز مختلط مانند: آنالیز مختلط اثر باک و نیومن و جاذبه‌های آنالیز مختلط اثر بوآز مراجعه نمایند.**

**باید توجه داشت که قضیه بنیادی جبر به وجود جوابها در $C$ حکم می‌کند ولی از چگـــونگی پیـــدا کردن آنها صحبتی به میان نمی‌آورد. در واقع هیچ گونه دستور جبری کارساز برای یک چند جملـــه یـــی غیر مشخصی از درجه ۵ ( یا بالاتر ) وجود ندارد .**